ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1) (i) Εστω $f(z)=z^2$ μιγαδική συνάρτηση
Νδο $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$

(ii) Εστω $f(z)=\begin{cases} z^2, & z\neq z_0 \\ 0, & z=z_0 \end{cases}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

ΛΥΣΗ

(i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=z_0^2 \iff \begin{cases} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall z\in\mathbb{C})\ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |z^2-z_0^2|<\varepsilon \end{cases}$

Παίρνουμε

$|z^2-z_0^2| = |z-z_0||z+z_0| = |z-z_0|\cdot|z-z_0+2z_0| \leq$

$\leq |z-z_0|\cdot(|z-z_0|+2|z_0|) \leq \delta(\delta+2|z_0|) \underset{\substack{\text{δίχως} \\ \text{βλάβη}}}{\overset{\delta\leq 1}{=}} \delta(1+2|z_0|)<\varepsilon$

Άρα, $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\right\} \iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$

(ii) Ουσιαστικά και εδώ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$ διότι και στις δύο των περιπτώσεων εξαιρείται το $z=z_0$

2) (i) Εστω $f(z)=z^2$ μιγαδική συνάρτηση
Νδο είναι συνεχής στο $z=z_0$

(ii) Εστω $f(z)=\begin{cases} z^2, & z\neq z_0 \\ 0, & z=z_0 \end{cases}$. Νδο είναι ασυνεχής στο $z=z_0$

ΛΥΣΗ

(i) Απο (1) δείξαμε $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^2 = f(z_0) \Rightarrow f$ συνεχής
(Μπορούμε και με τον ε-δ ορισμό)

(ii) Από την (1) δείξαμε

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2 \quad \text{αλλά} \quad f(z_0)=0.$$

Άρα, $z_0^2 \neq 0 \Rightarrow f$ ασυνεχής στο $z=z_0$ για $z_0 \neq 0$

Εάν τώρα, $z_0=0 \Rightarrow f(z_0)=0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=0=f(z_0)$

τότε f συνεχής στο $z_0=0$.

3) Να βρεθεί το όριο της μιγαδικής συνάρτησης

$$f(z)= \underbrace{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{u} + i\underbrace{\left(\frac{x\,\eta\mu x + y\,\eta\mu y}{x^2+y^2}\right)}_{v} \quad \text{στο } z_0=0$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα βρούμε πρώτα τα όρια των u και v στο $(0,0)$

$$0 \le |u(x,y)| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le$$

$$\le \frac{|x^3|}{|x^2|} + \frac{|y^3|}{|y^2|} = |x|+|y| \sim \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=0$$

$$v(x,y) = \frac{x\,\eta\mu x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\eta\mu y}{x^2+y^2} = \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{\eta\mu y}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\eta\mu x}{x}\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{\eta\mu y}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\eta\mu y}{y}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} \quad (1)$$

Με $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\eta\mu y}{y}\right) = 1-1=0$

Επίσης, $\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{y^2}{y^2}\right| = 1 \xrightarrow[\text{μηδ.}]{\text{φραγ.}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\eta\mu y}{y}\right)\frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$

Άρα, η (1): $\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 1$. Άρα, $\lim_{z\to 0} f(z) = 0+i = i$

4) Να αποδείξετε ότι:

α. Η ακολουθία $z_\nu = \frac{n-i}{n+1}$, συγκλίνει προς το 1

β. Η ακολουθία $w_\nu = \frac{i^n}{n}$, συγκλίνει προς το 0

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. $\lim_{n\to\infty} \frac{n-i}{n+1} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0 : \left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{\cancel{n}-i-\cancel{n}-1}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \left(\rightsquigarrow n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)$$

αλλά $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{N} \rightsquigarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{n}\right] \in \mathbb{N}$ και αφού <u>$n \geq n_0$</u>

τότε $n_0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{n}\right] + 1$.

β. Προφανώς η ακολουθία αυτή μας προϊδεάζει ότι θα συγκλίνει προς το 0, διότι οι όροι της είναι:

$i, \frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{3}, \frac{i^4}{4}, \frac{i^5}{5}, \dots$ <u>δηλ.</u> $i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \dots$

όπου συσσωρεύονται γύρω από το 0.

Παρόλα αυτά θα το αποδείξουμε: Έστω $\varepsilon > 0$,

$$|w_n - 0| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \rightsquigarrow \left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

όμοια με πριν $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} \notin \mathbb{N} \rightsquigarrow \left[\frac{1}{n}\right] \in \mathbb{N}$

Τότε $n_0 = \left[\frac{1}{n}\right] + 1$ τ/ω: $n \geq n_0$

5) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{Im(z^2)}{2|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έστω $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ και $z\neq 0$

$$z^2=(x+iy)(x+iy)=x^2-y^2+2xyi$$

Έτσι, $$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\cancel{2}xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & z\neq 0 \ (\Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0))\\ 0, & z=0 \ (\Leftrightarrow (x,y)=(0,0))\end{cases}$$

Έτσι, στην περίπτωση όπου $z\neq 0$ η f συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Θα εξετάσουμε στο $z=0$ με τον ορισμό

$\left(\lim\limits_{z\to 0} f(z)=f(0)\Longleftrightarrow f \text{ συνεχής στο } 0\right)$

Έτσι, παίρνουμε το όριο:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0) \ ⊛$$

⊛ διότι (α' τρόπος)

$x^2+y^2\geq 2|x|\cdot|y|$ και τότε

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{|x|\cdot|y|}{2\sqrt{|x|\cdot|y|}}=\frac{1}{2}\sqrt{|x|\cdot|y|}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

⊛ διότι (β' τρόπος): Πολικές $x=r\cos\varphi$ & $y=r\sin\varphi$.

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{r^2}}=\lim_{r\to 0}(r\cos\varphi\sin\varphi)=0.$$

6) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο $z_0=0$ η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases} \frac{Re^2 z}{z^2} & , z\neq 0 \\ 1 & , z=0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έστω $z=x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$

Τότε $Re^2 z = x^2$ και $z^2=(x+iy)^2$

Έτσι, $f(z)=\begin{cases} \frac{x^2}{(x+iy)^2} & , z\neq 0 \\ 1 & , z=0 \end{cases}$

Εξετάζουμε αν για δύο ακολουθίες z_n και w_n , $n\in\mathbb{N}$ $\xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f(z_n)\xrightarrow{n\to\infty} l \not\leftarrow^{n\to\infty} f(w_n)$, $n\in\mathbb{N}$

Έστω $z_n=\frac{1}{n}+i0=\frac{1}{n}$ & $w_n=0+i\frac{1}{n}=i\frac{1}{n}$.

ώστε $z_n, w_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αλλά, $f(z_n)=\frac{(1/n)^2}{(1/n)^2}=1\neq 0=\frac{0}{-(\frac{1}{n})^2}=f(w_n)$

άρα η f ασυνεχής στο $z_0=0$

Ασκηση / Εργασία :

Να εξετάσετε αν συγκλίνει η συνάρτηση $f(z)=\frac{|z|^2}{\bar{z}}$, όταν z τείνει προς το μηδέν